Μαθηματικά Ι

Η ύλη περιλαμβάνει τις ενότητες: διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός (όρια, παράγωγοι, ολοκληρώματα, άπειρες σειρές), αριθμητική ανάλυση (προσέγγιση τιμών και ριζών συναρτήσεων, παραγώγων και ολοκληρωμάτων). Οι αναφορές είναι στα κεφάλαια του:

Thomas, Απειροστικός λογισμός, Finney R.L., Weir M.D., Giordano F.R., ΠΕΚ

Thomas 0	Συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις
Thomas 6	Εκθετικές συναρτήσεις
	Αντίστροφες συναρτήσεις και λογάριθμοι
	Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους
	Παραμετρικές εξισώσεις
Thomas 1	Ρυθμοί μεταβολής και όρια
	Εύρεση ορίων και πλευρικών ορίων
	Άπειρα όρια
	Συνέχεια
Thomas 2	Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής
	Παράγωγοι γινομένου
	πηλίκου και αρνητικής δύναμης
	Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης
Thomas 3	Ακρότατα συναρτήσεων
	Γραφική επίλυση αυτόνομων διαφορικών εξισώσεων
	Κατασκευή μοντέλων και βελτιστοποίηση
	Μέθοδος του Νεύτωνα
Thomas 4	Αόριστα ολοκληρώματα
Thomas 7	διαφορικές εξισώσεις και μαθηματικά μοντέλα
	Κανόνες ολοκλήρωσης
	Γενικευμένα ολοκληρώματα
Thomas 5	Κύριοι τύποι ολοκλήρωσης
	Ολοκλήρωση κατά παράγοντες
	Μερικά κλάσματα
	Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις
	Υπολογισμός όγκων με διατμήσεις και περιστροφή γύρω από άξονα
	Δυνάμεις ρευστών
	Ροπές και κέντρα μάζας
Thomas 7	Θεώρημα σταθερού σημείου
Thomas 4	Προσέγγιση τιμών και ριζών συναρτήσεων
Thomas 3	Η μέθοδος της εφαπτομένης
	Προσεγγιστική παραγώγιση
	Προσεγγιστική ολοκλήρωση
	Ο κανόνας του Simpson
	Ολοκλήρωση με τη μέθοδο Monte Carlo
	Προσεγγιστική επίλυση διαφορικών εξισώσεων,
	Η μέθοδος του Euler

Θέματα παλαιών τελικών εξετάσεων στα Μαθηματικά Ι

Να προσεγγισθεί τετραγωνική ρίζα του 3, με τη μέθοδο Newton. Υπολογίστε το σφάλμα σας, αν $\sqrt{3} = 1.732050807$

$x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^2-3}{2x_n}$ και έστω $x_1 = 1$, τότε

$x_2 = 2$, $x_3 = \frac{7}{4} = 1.75$, και το σφάλμα είναι

$\left|\frac{1.732050807-1.75}{1.732050807}\right| 100 \approx 1\%$.

Να προσεγγισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^t \frac{e^x-1-x}{x^2} dx$ και να εκτιμηθεί το σφάλμα για $0 < t < 2$.

Αναπτύσσουμε το e^x κατά Taylor μέχρι x^4 και υπολογίζουμε το σφάλμα σ,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \sigma$$

$$\sigma = \frac{e^a}{5!} x^5$$

$$0 < a < t$$

αντικαθιστούμε στο ολοκλήρωμα,

$$\int_0^t \frac{e^x-1-x}{x^2} dx = \int_0^t \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \sigma\right) - 1 - x}{x^2} dx = \int_0^t \left(\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{\sigma}{x^2}\right) dx$$

ολοκληρώνουμε

$$\int_0^t \frac{e^x-1-x}{x^2} dx = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{72} + \int_0^t \frac{\sigma}{x^2} dx$$

και εκτιμούμε το σφάλμα,

$$\frac{e^0}{5!} x^3 < \frac{\sigma}{x^2} < \frac{e^t}{5!} x^3$$

$$0 < \frac{1}{480} t^4 < \int_0^t \frac{\sigma}{x^2} dx < \frac{e^t}{480} t^4 < \frac{e^2}{30}$$

Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x^7 \left(2 + 3x^8\right)^\pi dx$.

$2 + 3x^8 = u$, $\frac{du}{dx} = 24x^7$, $\int x^7 \left(2 + 3x^8\right)^\pi dx = \frac{1}{24} \int u^\pi du = \frac{1}{24(\pi+1)} u^{\pi+1} + c = \frac{1}{24(\pi+1)} \left(2 + 3x^8\right)^{\pi+1} + c$

Να προσεγγισθεί το $e^{0.3}$ με τους 4 πρώτους όρους του κατάλληλου αναπτύγματος Taylor.

$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, $e^{0.3} \approx 1 + \frac{0.3}{1!} + \frac{0.09}{2!} + \frac{0.027}{3!} = 1 + 0.3 + 0.045 + 0.0045 = 1.3495$.

Να βρεθούν και χαρακτηρισθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $x^4 - 2x^2 + 2$.

$y(x) = x^4 - 2x^2 + 2$, $y'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$, $x = 0, \pm 1$, $y''(0) < 0$ άρα τοπικό μέγιστο στο $x = 0$, $y''(\pm 1) > 0$ άρα τοπικό ελάχιστο στο $x = \pm 1$.

Να βρεθεί το μήκος τόξου της $y = \frac{2}{3} x^{3/2}$, από $x = 0$ έως $x = 1$.

$E = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x} dx = \frac{2}{3} (1 + x)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \left(2\sqrt{2} - 1\right)$.

Να βρεθεί το πλευρικό εμβαδόν του παραβολοειδούς εκ περιστροφής της $y = x^2$ περί τον άξονα των y, από $x = 0$ έως $x = 1$.

$E = \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{\pi}{6} (1 + 4x^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} \left(\frac{5\sqrt{5}}{6} - \frac{1}{6}\right)$.

Να προσεγγισθεί ο $\ln(1.3)$, με τον κανόνα του τραπεζίου (4 τμήματα) στο κατάλληλο ολοκλήρωμα.

$\ln(1.3) = \int_1^{1.3} \frac{1}{x} dx \approx \frac{1.3-1}{4} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{1} + \frac{1}{1.075} + \frac{1}{1.15} + \frac{1}{1.225} + \frac{1}{2}\frac{1}{1.3}\right) \approx 0.2626$.

Βοηθήματα:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$, $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \left(\frac{1}{2} f(a) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(b)\right)$